

Elementarna matematika 2

predavanja

Sveučilište u Zagrebu, PMF-MO

Analitička geometrija

Udaljenost točke od pravca

Definicija

Udaljenost točke T od pravca p definira se kao

$$d(T, p) := \inf_{X \in p} d(T, X).$$

Ranije smo pokazali i

$$d(T, p) = d(T, N),$$

gdje je N nožište okomice iz točke T na p .

Propozicija 8

Neka je dana točka $T_0(x_0, y_0, z_0)$ te pravac p jednadžbom

$$p \dots \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{a}, \quad \vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{a} = (\alpha, \beta, \delta).$$

Tada je

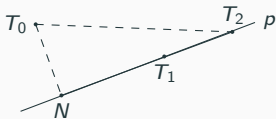
$$d(T_0, p) = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2}},$$

gdje je

$$X = \begin{vmatrix} y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ \beta & \delta \end{vmatrix}, \quad Y = \begin{vmatrix} z_0 - z_1 & x_0 - x_1 \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix}, \quad Z = \begin{vmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}.$$

Dokaz formule za udaljenost točke od pravca

Dokaz.



Neka je $T_2 \in p$, $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{a}$, pa je

$$\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = [\overrightarrow{T_1 T_2}].$$

Promotrimo $\triangle T_0 T_1 T_2$ njegovu površinu na dva načina:

$$P(\triangle T_0 T_1 T_2) = \frac{1}{2} |T_1 T_2| d(T_0, p) = \frac{1}{2} |\vec{a}| d(T_0, p),$$

$$P(\triangle T_0 T_1 T_2) = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{T_1 T_0}] \times [\overrightarrow{T_1 T_2}]|.$$

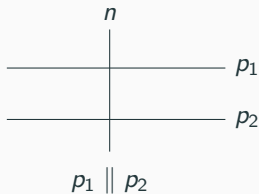
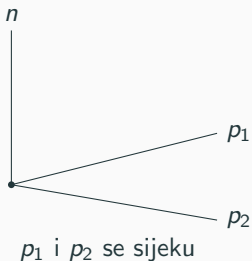
$$d(T_0, p) = \frac{|(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \times \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{\left| \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ \alpha & \beta & \delta \end{bmatrix} \right|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2}} = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2}}.$$

Zajednička normala pravaca

Definicija

Zajednička normala pravaca p_1 i p_2 je pravac n koji siječe i pravac p_1 i pravac p_2 te je okomit i na p_1 i na p_2 .

Napomena. Ako se p_1 i p_2 sijeku ili su paralelni, onda očito postoji zajednička normala.



Međutim, čak i kada su p_1 i p_2 mimoilazni, također postoji zajednička normala. Opisat ćemo postupak.

Jednadžbe ravnina kroz zajedničku normalu

Neka je

$$p_1 \dots \vec{r} = \vec{r}_1 + \alpha \vec{a}_1$$

pravac kroz T_1 , $\vec{r}_{T_1} = \vec{r}_1$,

$$p_2 \dots \vec{r} = \vec{r}_2 + \alpha \vec{a}_2$$

pravac kroz T_2 , $\vec{r}_{T_2} = \vec{r}_2$.

Pravac n mora biti okomit i na p_1 i na p_2 , pa možemo BSO uzeti da mu je pravac smjera

$$\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2.$$

Uočimo $\vec{n} \neq \vec{0}$ jer pretpostavljamo da p_1 i p_2 nisu paralelni.

Pravac p_1 i n se moraju sjeći, pa određuju ravninu π_1 u kojoj oba pravca leže. U ravnini π_1 leži i točka T_1 .

Dakle, vrijedi

$$T \in \pi_1 \iff \text{mješoviti produkt } (\vec{r}_T - \vec{r}_1, \vec{a}_1, \vec{n}) = 0.$$

Ravnina kroz zajedničku normalu

Analogno, pravac p_2 i n određuju ravninu π_2 u kojoj oba leže, kao i točka T_2 . Dakle, vrijedi

$$T \in \pi_2 \iff \text{mješoviti produkt } (\vec{r}_T - \vec{r}_2, \vec{a}_2, \vec{n}) = 0.$$

Po konstrukciji,

$$n = \pi_1 \cap \pi_2,$$

pa je $T \in n$ sustav

$$\begin{cases} (\vec{r}_T - \vec{r}_1, \vec{a}_1, \vec{n}) = 0, \\ (\vec{r}_T - \vec{r}_2, \vec{a}_2, \vec{n}) = 0. \end{cases}$$

Dakle, dobili smo opći oblik jednadžbe pravca n , jer su gornje jednadžbe opće jednadžbe ravnina oblika

$$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Budući da pravci p_1 i p_2 nisu paralelni, ravnine π_1 i π_2 se moraju sjeći, tj. ni te ravnine nisu paralelne.

Naime, obje sadrže isti smjer $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$ te π_1 sadrži još smjer $\vec{a}_1 \perp \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$, a π_2 sadrži još smjer $\vec{a}_2 \perp \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$. Kako $\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$, ravnine ne mogu biti paralelne.

Definicija

Udaljenost pravaca p_1 i p_2 se definira kao

$$d(p_1, p_2) = \inf\{d(Q_1, Q_2) : Q_1 \in p_1, Q_2 \in p_2\}.$$

Napomena. Jasno, ako se p_1 i p_2 sijeku, onda je

$$d(p_1, p_2) = 0.$$

Propozicija 9

- (a) *Neka je n zajednička normala mimosmjernih pravaca p_1 i p_2 , te neka je točka N_1 sjecište n i p_1 , a N_2 sjecište n i p_2 . Tada je*

$$d(p_1, p_2) = d(N_1, N_2),$$

tj. udaljenost mimosmjernih pravaca jednaka je duljini dužine koju odsijeca njihova zajednička normala.

- (b) *Neka je*

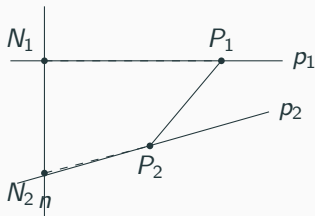
$$p_1 \dots \vec{r} = \vec{r}_1 + t_1 \vec{a}_1, \quad T_1(x_1, y_1, z_1), \quad \vec{a}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1),$$

$$p_2 \dots \vec{r} = \vec{r}_2 + t_2 \vec{a}_2, \quad T_2(x_2, y_2, z_2), \quad \vec{a}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2).$$

Tada je

$$d(p_1, p_2) = \frac{\left| \det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{bmatrix} \right|}{\sqrt{(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \delta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \delta_2^2) - (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \delta_1\delta_2)^2}}.$$

D. [(a)]



Neka su $P_1 \in p_1$ i $P_2 \in p_2$ proizvoljne. Tvrdimo

$$d(P_1, P_2) \geq d(N_1, N_2).$$

Neka je O ishodište koord. sustava. Tada:

$$\vec{r}_{P_1} = [\overrightarrow{OP_1}] = [\overrightarrow{ON_1}] + [\overrightarrow{N_1P_1}] = \vec{r}_{N_1} + t_1 \vec{a}_1, \quad \text{za neki } t_1 \in \mathbb{R},$$

$$\vec{r}_{P_2} = \vec{r}_{N_2} + t_2 \vec{a}_2, \quad \text{za neki } t_2 \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. [(a)]

Dakle,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{[P_1P_2]} &= \vec{r}_{P_2} - \vec{r}_{P_1} = (\vec{r}_{N_2} - \vec{r}_{N_1}) + (t_2\vec{a}_2 - t_1\vec{a}_1) \\ &= \overrightarrow{[N_1N_2]} + (t_2\vec{a}_2 - t_1\vec{a}_1).\end{aligned}$$

Slijedi:

$$\begin{aligned}d(P_1, P_2)^2 &= |\overrightarrow{[P_1P_2]}|^2 = \overrightarrow{[P_1P_2]} \cdot \overrightarrow{[P_1P_2]} \\ &= \overrightarrow{[N_1N_2]} \cdot \overrightarrow{[N_1N_2]} + 2\overrightarrow{[N_1N_2]} \cdot (t_2\vec{a}_2 - t_1\vec{a}_1) + (t_2\vec{a}_2 - t_1\vec{a}_1)(t_2\vec{a}_2 - t_1\vec{a}_1).\end{aligned}$$

Kako je

$$\overrightarrow{[N_1N_2]} = \eta\vec{n}, \quad \vec{n} \perp \vec{a}_1, \quad \vec{n} \perp \vec{a}_2,$$

vrijedi

$$\overrightarrow{[N_1N_2]} \cdot \vec{a}_1 = 0, \quad \overrightarrow{[N_1N_2]} \cdot \vec{a}_2 = 0.$$

Dokaz. [(a)]

Zato:

$$d(P_1, P_2)^2 = |[\overrightarrow{N_1 N_2}]|^2 + |t_2 \vec{a}_2 - t_1 \vec{a}_1|^2 \geq |[\overrightarrow{N_1 N_2}]|^2 = d(N_1, N_2)^2.$$

Jednakost vrijedi ako

$$t_2 \vec{a}_2 - t_1 \vec{a}_1 = 0,$$

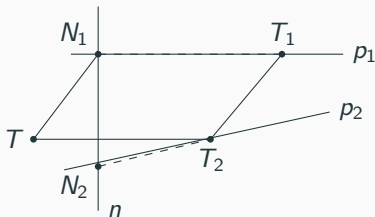
a kako \vec{a}_1 i \vec{a}_2 nisu kolinearni jer p_1 i p_2 nisu paralelni, to je ako

$$t_1 = 0 \quad \text{i} \quad t_2 = 0,$$

tj.

$$P_1 = N_1 \quad \text{i} \quad P_2 = N_2.$$

[(b)]



Neka je T točka takva da je

$$[\overrightarrow{N_1 T}] = [\overrightarrow{T_1 T_2}].$$

Tada je $N_1 T_1 T_2 T$ paralelogram jer su stranice $N_1 T$ i $T_1 T_2$ jednake duljine i paralelne.

Dakle, pravac $p = T_2 T$ je paralelan pravcu p_1 .

Dokaz. [(b)]

Kako je zajednička normala n pravaca p_1 i p_2 okomita na p_1 i p_2 , onda je okomita na p i p_2 , tj. n je pravac okomit na ravninu π u kojoj leže točke T , T_2 i N_2 .

Dakle,

$$[\overrightarrow{TN_2}] \perp [\overrightarrow{N_1N_2}],$$

pa je $\triangle TN_1N_2$ pravokutan.

U $\triangle TN_1N_2$ vrijedi:

$$\cos \angle([\overrightarrow{N_1T}], [\overrightarrow{N_1N_2}]) = \frac{|[\overrightarrow{N_1N_2}]|}{|[\overrightarrow{N_1T}]|}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
 d(p_1, p_2) &= d(N_1, N_2) \\
 &= |[\overrightarrow{N_1 N_2}]| \\
 &= |[\overrightarrow{N_1 T}]| \cdot \cos \angle([\overrightarrow{N_1 T}], [\overrightarrow{N_1 N_2}]) \\
 &= |[\overrightarrow{T_1 T_2}]| \cdot \cos \angle([\overrightarrow{T_1 T_2}], [\overrightarrow{N_1 N_2}]) \\
 &= \frac{|[\overrightarrow{T_1 T_2}]| \cdot |[\overrightarrow{N_1 N_2}]| \cdot \cos \angle([\overrightarrow{T_1 T_2}], [\overrightarrow{N_1 N_2}])}{|[\overrightarrow{N_1 N_2}]|} \\
 &= \frac{[\overrightarrow{T_1 T_2}] \cdot [\overrightarrow{N_1 N_2}]}{|[\overrightarrow{N_1 N_2}]|} \\
 &= \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}. \quad (*)
 \end{aligned}$$

Dokaz. [(b)]

Uočimo da je

$$\vec{n} = \eta(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)$$

za neki $\eta \in \mathbb{R}$, jer je

$$n \perp p_1 \quad \text{i} \quad n \perp p_2.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} d(p_1, p_2) &= \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} = \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{a}_1, \vec{a}_2)}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)}}. \end{aligned}$$

Dokaz. [(b)]

Traženi izraz u nazivniku dobivamo iz tzv. Lagrangeovog identiteta (poseban slučaj identiteta $(a \times b) \cdot (c \times d)$):

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{a}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{b})$$

Zato:

$$d(p_1, p_2) = \frac{\left\| \begin{array}{ccc} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2 \end{array} \right\|}{\sqrt{(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \delta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \delta_2^2) - (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \delta_1\delta_2)^2}}.$$

□

Završne napomene

Napomena. Ako se p_1 i p_2 sijeku,

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0,$$

pa formula iz propozicije daje

$$d(p_1, p_2) = 0.$$

Ako su p_1 i p_2 paralelni,

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \vec{0},$$

opet je

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0.$$

Međutim, onda formula iz propozicije daje

$$d(p_1, p_2) = \frac{0}{0},$$

što nije definirano.

No, u oba slučaja je

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0$$

\iff pravci p_1 i p_2 leže u istoj ravnini

$$\iff \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2 \end{vmatrix} = 0,$$

pa je ovo uvjet za komplanarnost dvaju pravaca.